دانشکده مهندسی و فنآوری دانشگاه مازندران

عنوان درس: تحلیل و مدیریت سیستم‌های منابع آب ۱

Water Resources System Analysis-1

مدرس: دکتر محمود محمد رضاپور طبری

دانشیار گروه مهندسی عمران

مفهوم بهینه‌سازی کلاسیک

- مبانی بهینه‌سازی
- شرایط بهینگی کان-تاکر
- روش برنامه‌ریزی خطی
- مدل‌های بهینه‌سازی خطی
- روش سیمپلکس، تحلیل حساسیت)

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

در طی سال‌های اخیر، مدل‌های ریاضی بهینه‌یابی با توجه به ظهور کامپیوتر در عرصه علم و تکنولوژی گسترش چشمگیری یافته است. امروزه بهینه‌یابی به عنوان یک موضوع کلیدی در اکثر علوم مورد توجه و استفاده قرار گرفته است.

بهینه یابی: یافتن مناسب ترین مقدارهای ممکن برای متغییرهای مورد نظر در یک مسئله به گونه ای که به ازای مقدارهای یافت شده، مقدار مطلوبی برای هدف مسئله حاصل شود.

تصمیم‌گیری روش علمی برای انتخاب بهترین راهکار موجود می‌باشد.

تصمیم‌گیرنده، **اولین عنصر** تصمیم‌گیری است که ممکن است یک فرد، گروه یا سازمان باشد. در صورتیکه تعداد تصمیم‌گیرندگان بیش از یکی باشد، به دلیل متفاوت بودن نظرات و اهداف هر کدام از تصمیم‌گیرندگان، معمولاً نتیجه‌ای که مورد نظر همه باشد، حاصل نمی‌گردد. در چنین مواردی معمولاً تصمیمی اتخاذ می‌گردد که در آن تا حد امکان نظرات **کلیه تصمیم‌گیرندگان** مورد توجه قرار گیرد.

در مسائل تصمیم‌گیری به منظور رسیدن به اهداف مورد نظر می‌توان مسأله را به صورت یک **مدل ریاضی** تبدیل نمود و از روش‌های بهینه‌یابی موجود بهره جست.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

تبدیل یک مسأله تصمیم‌گیری به یک مدل ریاضی، مدل‌سازی نامیده می‌شود. گزینه‌های ممکن در تصمیم‌گیری به صورت **متغیرهای تصمیم** (Decision variables) در مدل ریاضی در نظر گرفته می‌شوند.

- متغیر تصمیم در واقع متغیرهایی هستند که در تعیین مقدار تابع هدف نقش اصلی (مستقیم) را بازی می کنند.
- در هر مسئله بهینه سازی یافتن مقدار بهینه برای متغیرهای تصمیم به طوری که به ازای آن ها مقدار تابع هدف، بیشینه، کمینه یا برابر یک مقدار مشخص شود، مدنظر است.
- متغیرهای تصمیم متغیرهای مستقل مسئله هستند که می توان برای آنها هر مقداری را (در محدوده مجاز) متصور شد.
- تصمیم در مورد مقدار نهایی هر متغیر تصمیم در اختیار کاربر و یا روش بهینه سازی مسئله است که با توجه به مقدار متناظر تابع هدف برای هر مجموعه از متغیرهای تصمیم اتخاذ می شود.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

تعریف متغییرهای تصمیم

متغییرهای تصمیم یا همان مجهولاتی که لازم است در طی فرآیند بهینه سازی تعیین شوند باید بگونه ای در نظر گرفته شوند که شرایط زیر را محقق نمایند:

- ✓ بر مبنای آن ها بتوان تابع هدف مناسبی را شکل داد به گونه ایی که تابع هدف وابسته این متغییر تصمیم باشد.
- ✓ حتی المکان به صورت متغییر ترکیبی با سایر متغییرهای مؤثر در مسأله نباشد. به عبارت دیگر متغییر تصمیم مستقل باشد و دربردارنده چندین متغییر نباشد. به عنوان مثال اگر متغییر تصمیم میزان تخصیص به نیازهای آبی است و این نیازها متنوع می باشند، بهتر است که برای هر نیاز آبی یک متغییر تصمیم مجزایی را تعریف نمود. این امر در خصوص تخصیص از منابع مختلف آبی نیز صادق است.
- ✓ متغییرهایی که دارای تغییرات پیوسته می باشند جهت انتخاب به عنوان متغییر تصمیم مناسب تر می باشند. علت این امر تنوع وسیع انتخاب آن ها توسط الگوریتم های بهینه سازی است. در صورت گسسته بودن متغییرهای تصمیم، تعداد حالت هایی که امکان انتخاب توسط مدل های بهینه سازی وجود دارد به نحوه چشمگیری کاهش می یابد.
- ✓ از بکار بردن توابع، شاخص ها و معیارهای ریاضی به عنوان متغییر تصمیم اکیداً خودداری گردد.

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

نمونه هایی از متغییرهای تصمیم معمول در مهندسی آب

۱- میزان تخصیص ماهانه (سالانه) آب به نیازهای شرب، کشاورزی و صنعت

۲- میزان برداشت آب از دریچه های یک سد به صورت انتخابی

۳- میزان برداشت از چاه های بهره برداری

۴- قطر، طول و عمق نصب لوله در شبکه توزیع آب شهری

۵- درصد سطح تحت پوشش هر یک از کاربری های واقع در یک محدوده مطالعاتی

۶- میزان برداشت آب از رودخانه به مصارف مختلف

۷- میزان تصفیه فاضلاب کارخانجاتی که دارای پساب ورودی به رودخانه می باشند.

۸- حجم خاکبرداری و خاکریزی مورد نیاز جهت تعیین ابعاد بهینه مخازن سدها

۹- موقعیت چاه های پایش جهت کاهش هزینه های نمونه برداری کمی و کیفی

۱۰- درصد زیرکشت هر یک از محصولات واقعی در یک منطقه کشاورزی

نحوه تعریف تابع هدف و محدودیت ها در مسائل بهینه سازی

۱۱- ابعاد کانال با شکل های مختلف

۱۲- ابعاد سرریزهای مختلف

۱۳- درصد مواد با دانه بندی های مختلف جهت ساخت موج شکن

۱۴- موقعیت و عمق دفن پساب های صنعتی

۱۵- ظرفیت و میزان انتقال آب در خطوط انتقال

۱۶- موقعیت مخازن در شبکه های توزیع آب شهری

۱۷- پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان (ضرایب ذخیره و هدایت هیدرولیکی) برای هر نقطه از آبخوان

۱۸- مقادیر بردارهای وزن و بایس در مدل های شبیه سازی متغییرهای منابع آب

۱۹- مقادیر پارامترهای انواع مدل های نرم جهت شبیه سازی متغییرهای منابع آب

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

مجموعه متغیرهای تصمیم یا گزینه‌های ممکن، فضای تصمیم (Decision space) را تشکیل می‌دهند.

فضای تصمیم مجموعه تمامی جواب های ممکن در یک مسئله بهینه سازی را مشخص می کند.

به عبارت دیگر هر نقطه از فضای تصمیم یک مسئله بهینه سازی معرف یک بردار از متغیرهای تصمیم مسئله است. هر یک از مؤلفه های این بردار مقدار یکی از متغیرهای تصمیم را مشخص می کنند که می تواند توسط کاربر یا روش بهینه سازی انتخاب شود. بنابراین تمام بردارهای ممکن از متغیرهای تصمیم، فضای تصمیم مسئله را تشکیل می دهند.

محدوده و مرز فضای تصمیم هر مسئله بهینه سازی با حدود مقدارهای مجاز متغیرهای تصمیم آن مشخص و محدود می شود به این ترتیب در صورت عدم وجود محدودیت در یک یا چند متغیر تصمیم، فضای تصمیم می تواند نامتناهی شود.

به عنوان مثال در تعیین اندازه حجم مخزن به عنوان یک متغیر تصمیم، فضای تصمیم از کمترین تا بیشترین مقدار ممکن برای حجم مخزن را شامل می‌شود.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

جواب (Solution)

به هر مجموعه و یا بردار از متغیرهای تصمیم که در آن هر متغیر دارای مقداری از محدوده مجاز مربوط به خود است، یک جواب برای مسئله بهینه سازی گفته می شود. به عنوان مثال اگر یک مسئله بهینه سازی دارای دو متغیر تصمیم باشد و هر دو متغیر تصمیم نیز مجاز به انتخاب از بازه (۵ و ۰) باشند، آنگاه هر زوج مرتب در این محدوده، یک جواب برای مسئله مورد نظر را نشان می دهد.

جواب‌های امکان‌پذیر (Feasible solutions) جواب‌هایی می‌باشند که کلیه محدودیت‌ها را برآورده می‌سازند.

مجموعه جواب‌های امکان‌پذیر، **فضای امکان‌پذیر (موجه)** را تشکیل می‌دهند.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

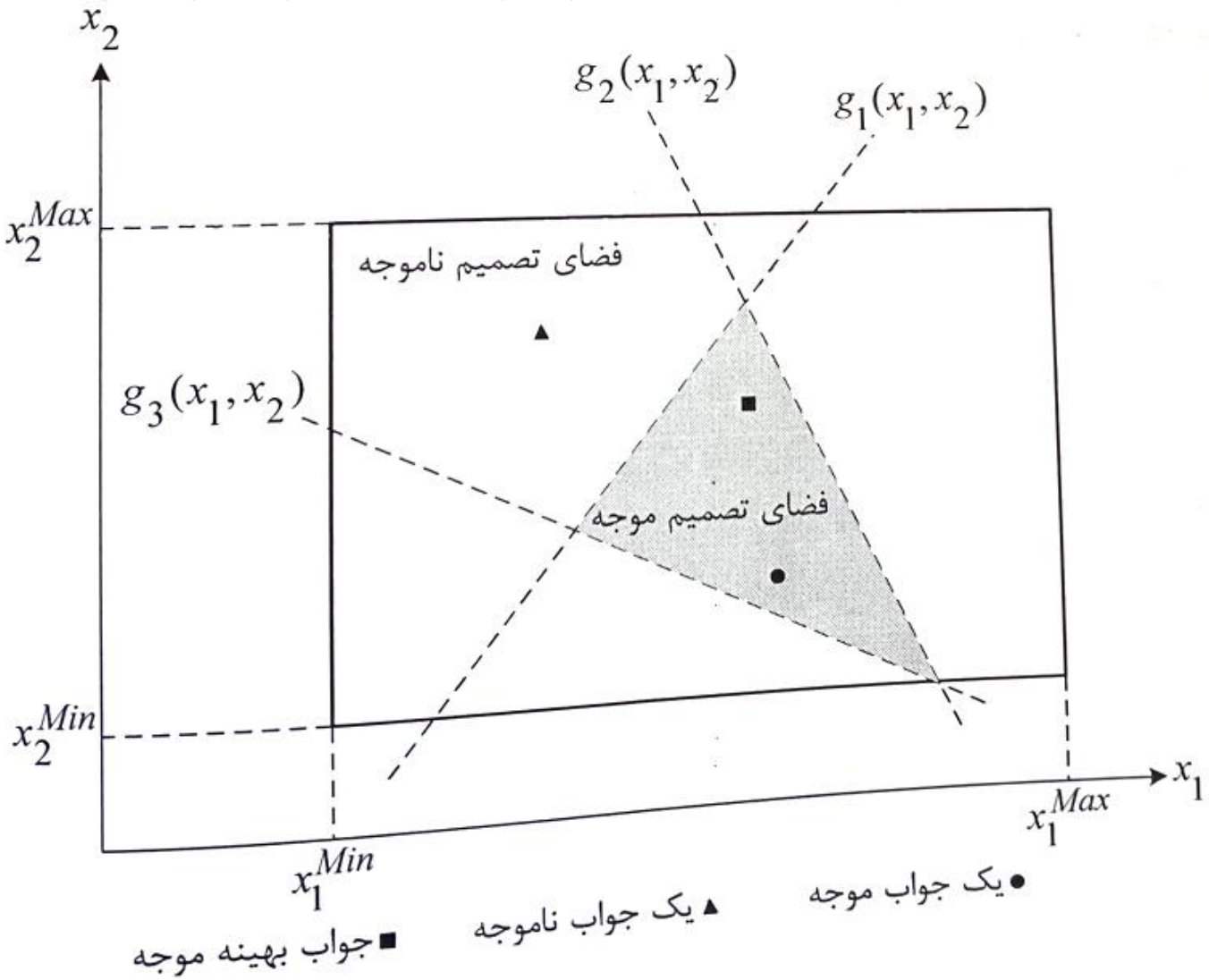
قیدهای مربوط به متغیرهای تصمیم در هر مسئله بهینه سازی به صورت برشی در فضای تصمیم مسئله اعمال می شوند.

با توجه به جهت نامساوی مسئله موجود در قید، یک سمت برش به عنوان منطقه موجه و سمت دیگر به عنوان منطقه ناموجه تعریف می شود. به این ترتیب با اعمال کلیه قیدها در فضای تصمیم، ممکن است فضایی به وجود بیاید که در واقع اشتراک منطقه موجه کل قیدها باشد به چنین فضایی فضای تصمیم موجه و به مکمل این فضا در داخل فضای تصمیم مسئله فضای تصمیم ناموجه می گویند. از آنجا که جواب مقدارهای متغیرهای تصمیم نهایی هر مسئله باید به طور حتم در فضای تصمیم موجه مسئله قرار داشته باشند تا کلیه قیدها را ارضا نمایند بنابراین در صورت تهی بودن فضای تصمیم موجه، مسئله بهینه سازی در عمل جواب نخواهد داشت.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

اگر فضای تصمیم‌گیری قابل شمارش باشد (همانند تعیین اندازه قطر لوله، تعیین تعداد لوله ها در یک شبکه توزیع آب، انتخاب نوع کاربری اراضی در یک حوضه جهت کاهش میزان خسارات سیل، انتخاب پیزومترها برای شبکه پایش، تعیین تعداد چاه های دارای کیفیت مناسب و ...)، مسأله گسسته نامیده می‌شود و چنانچه این فضا پیوسته باشد و متغیرهای تصمیم‌گیری بی‌نهایت حالت ممکن را قبول کنند (همانند میزان برداشت از منابع آب، میزان تخصیص به نیازها، مقدار پارامترهای هیدرودینامیکی آبخوان و ...)، مسأله پیوسته نامیده می‌شود. همچنین این فضای تصمیم ممکن است محدب یا غیرمحدب باشد.

نمایش فضای تصمیم و جواب های موجه و ناموجه



آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

در تصمیم‌گیری معمولاً محدودیت‌های مالی، اجتماعی، تکنیکی و اثرات جانبی زیست محیطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. این محدودیت‌ها در مسائل مدل‌سازی به صورت محدودیت (Constraint) (قید) در نظر گرفته می‌شوند.

محدودیت‌ها نیز معمولاً توسط معادلات و یا نامعادلاتی که شامل متغیرهای تصمیم‌گیری هستند، مشخص می‌گردند.

به صورت کلی بهینه سازی زمانی معنا خواهد داشت که:

- مسئله موجود از نظر برخی منابع دچار محدودیت باشد (در توابع هدف خطی).
- با افزایش استفاده از یک یا چند منبع بیش از یک مقدار مشخص، سودهای مورد انتظار طرح کاهش یافته و به زیان (افزایش هزینه) تبدیل شوند و سبب کاهش مطلوبیت (عدم بهبود) تابع هدف شوند (در توابع هدف غیرخطی).

طبیعی است که در صورت عدم وجود محدودیت در منابع، مقدار تابع هدف خطی را می توان به صورت نامحدود بهبود داد از طرفی در شرایطی که مقدار یک منبع فراوان باشد استفاده بهینه از آن منبع لزوم چندانی نداشته و بهینه سازی در مصرف آن نیز کم اهمیت خواهد بود. بنابراین هر مسئله بهینه سازی با توجه به فیزیک و شرایط واقعی مربوط به آن می تواند دارای تعدادی محدودیت و یا قید باشد که در ازای وجود آن ها، انتخاب برخی مقدارها برای متغیرهای تصمیم ناممکن می شود.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

تابع هدف (Objective Function)

هدف نهایی در هر مسئله بهینه سازی برقراری شرایط بهینه برای یکی از اجزاء مسئله است. این جزء (نمایه) که اغلب با حرف Z نشان داده می شود همواره به طور مستقیم یا غیر مستقیم تابعی از متغیرهای دیگر است که می توان این ارتباط را به صورت یک رابطه ریاضی نمایش داد. به این رابطه ریاضی، تابع هدف مسئله بهینه سازی گفته می شود.

- در مسائل بهینه سازی، تابع هدف مهمترین رکن است. هر تابع هدف دارای جهتی است که راستای بهینه سازی را نشان می دهد. جهت تابع هدف می تواند بیشینه سازی، کمینه سازی یا برابرسازی نمایه Z باشد.
- متغیرهای موجود در رابطه ریاضی تابع هدف را باید به گونه ای تغییر داد که منجر به مقدار بهینه (مقدار بیشینه در مسئله بیشینه سازی و مقدار کمینه در مسئله کمینه سازی و مقدار معادل در مسئله های برابرسازی) برای نمایه Z شوند. به این ترتیب مطلوبیت هر جواب در روند حل مسئله با توجه به مقدار عددی نمایه Z (تابع هدف) مربوط به آن جواب تعیین می شود.

آشنایی با مفهوم بهینه‌سازی و تعاریف مرتبط با آن

تابع برازش (Fitness Function)

متناظر با هر مجموعه از متغیرهای تصمیم بدون توجه به موجه و یا ناموجه بودن جواب و فقط جهت بررسی مطلوبیت متغیرهای تصمیم (جواب) در فضای تصمیم یک تابع هدف می تواند محاسبه شود. چنانچه مقدار این تابع هدف ضمن بررسی ارضا یا عدم ارضای قیدها و با اعمال جریمه (Penalty) اصلاح شود تابع برازش نام می گیرد و برای سنجش جواب های مختلف نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

متغیرهای حالت (State Variable)

آن دسته از متغیرهای مسئله هستند که ممکن است به طور مستقیم در تعیین مقدار تابع هدف مؤثر نبوده ولی به طور عمومی در ارزیابی قیدها مورد نیاز باشند. این متغیرها به طور مستقیم تحت تأثیر مقدارهای انتخاب شده برای متغیرهای تصمیم هستند. در رابطه موجود بین متغیرهای تصمیم و حالت، متغیرهای تصمیم معادل متغیرهای مستقل (آزاد) و متغیرهای حالت معادل متغیرهای وابسته هستند. به عبارت دیگر انتخاب هر مقدار دلخواه (با رعایت قیدها) برای متغیرهای تصمیم امکان پذیر است و به فراخور آن مقدارهای انتخاب شده، مقدار متغیرهای حالت با توجه به رابطه موجود بین متغیرهای حالت با متغیرهای تصمیم بدست می آیند.

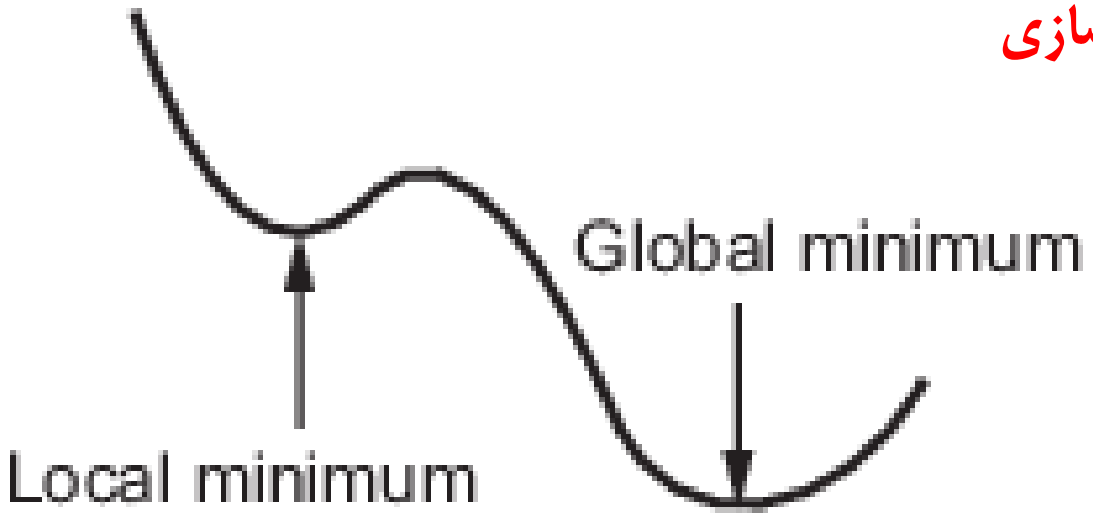
بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

بهینه محلی یا موضعی (Local Optimum)، بهینه مطلق (Global Optimum) و نزدیک بهینه (Near Optimum)

به صورت کلی راه حل و یا راه حل هایی که توسط مدل های بهینه سازی ارائه می شود به عنوان یک جواب (Solution) مطرح می باشد. در صورتی که جواب های یافت شده از جواب هایی که در نزدیکی آن در فضای امکان پذیر وجود دارند، بهتر باشد، آن جواب به عنوان جواب بهینه محلی (موضعی) شناخته می شود. علت محلی بودن این جواب، آن است که ممکن است جواب بهتری در فاصله دورتری از این جواب وجود داشته باشد که مدل بهینه ساز آن را پیدا نکرده است.

در صورتی که جواب بهینه مشخص شده از تمامی جواب های واقع در فضای موجه تصمیم گیری بهتری باشد، آن جواب به عنوان جواب بهینه کلی شناخته می شود و هدف نهایی تمامی مدل های بهینه سازی، تعیین این جواب است که بهترین راه حل از یک مسأله بهینه سازی تلقی می شود.

بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی



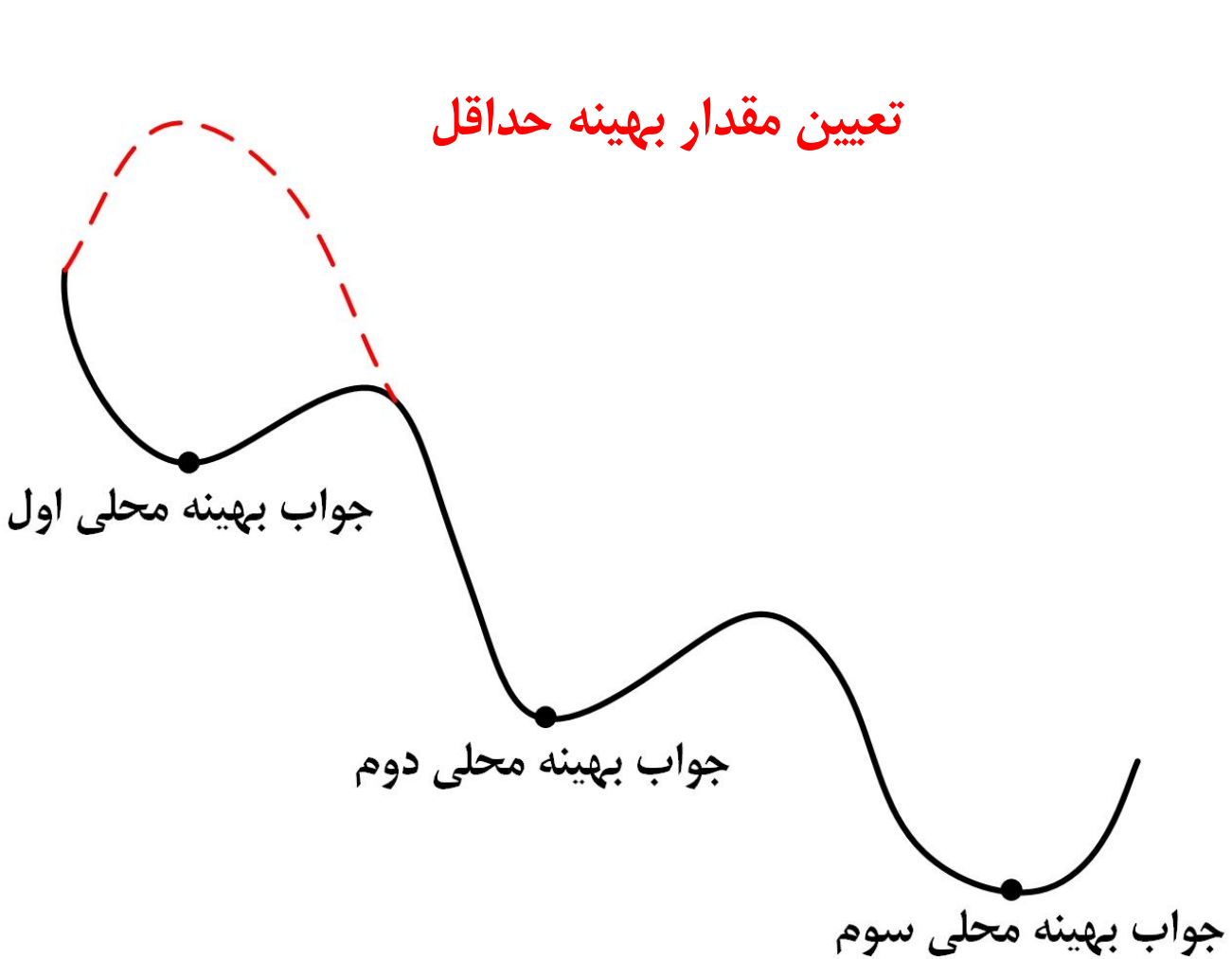
نمونه ای از تفاوت بین جواب بهینه محلی و کلی در یک مسأله حداقل سازی

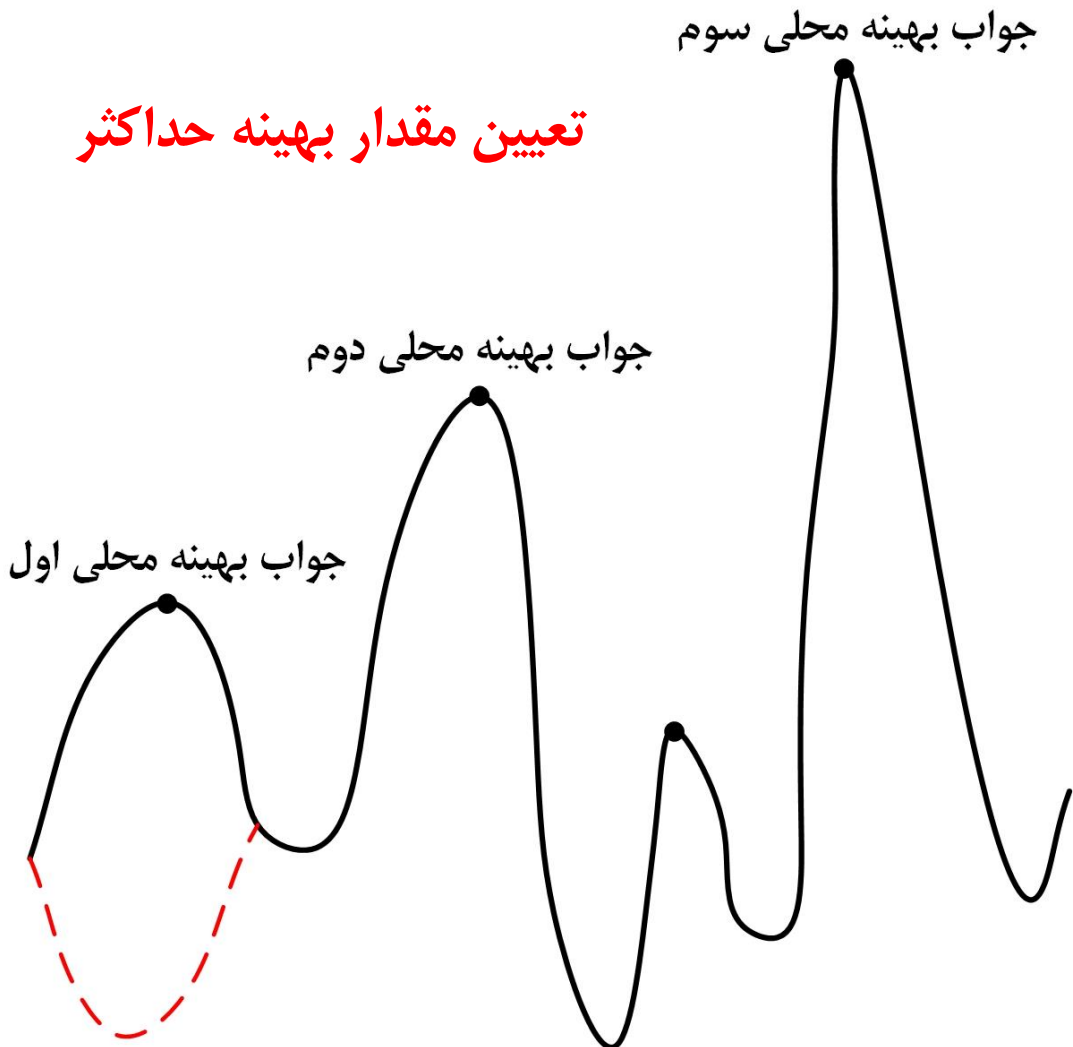
نکته ۱: با توجه به فضای موجه ایی که توسط محدودیت های مسأله تعریف می شود، مقدار جواب های محلی و کلی می تواند متفاوت باشد. هرچه این فضای موجه کوچکتر باشد، امکان یافتن جواب کلی بیشتر خواهد بود.

نکته ۲: جهت رهایی از جواب های محلی و اطمینان از یافتن جواب کلی می توان پس از یافتن یک جواب محلی با تغییر علامت و یا مقدار آن جواب (در صورتی که مسأله حداقل سازی است، جواب محلی یافت شده چند برابر افزایش یابد و به مجموعه جواب های موجود در فضای موجه اضافه شود. همچنین اگر مسأله حداکثرسازی است، جواب محلی در عدد منفی یک ضرب شود تا از حالت جواب محلی مطلوب خارج گردد.)، جواب محلی مورد نظر را از مجموعه جواب های موجود خارج نمود تا مدل سایر جواب های محلی را مورد جستجو قرار دهد.

بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

در صورتی که جواب محلی دوم یافت شده از جواب محلی اول بهتر بود، جایگزین جواب محلی اول و در غیر اینصورت جواب محلی سوم مورد جستجو قرار گیرد. این روند تا جستجوی کامل فضای موجه ادامه می یابد.

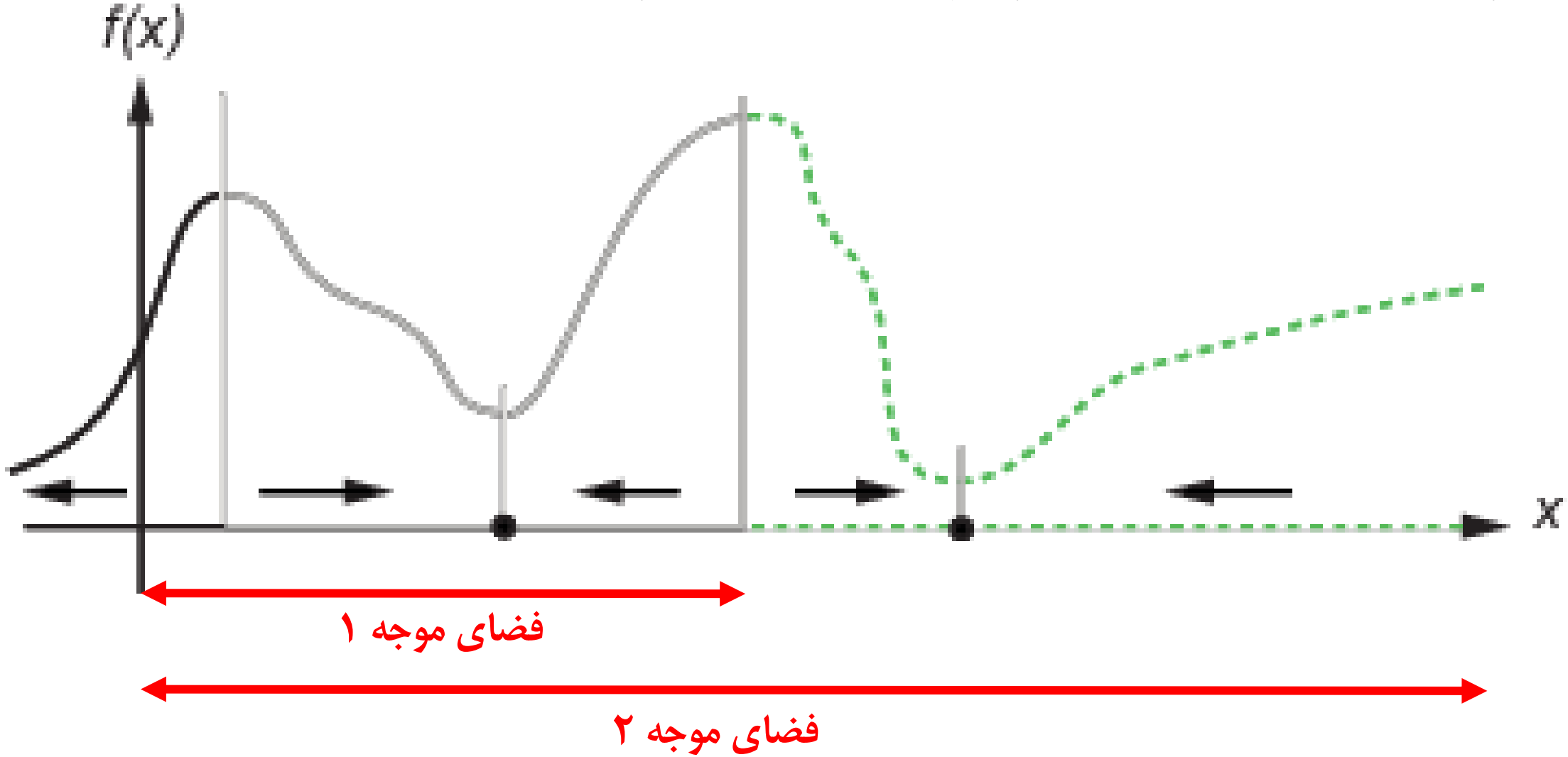




بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

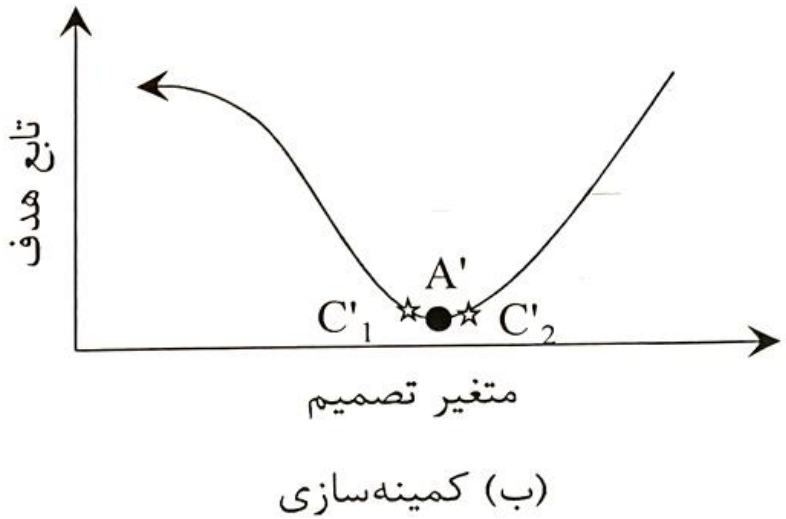
بنابراین فضایی که به عنوان فضای موجه توسط محدودیت های مسأله تعریف می شود، در انتخاب جواب بهینه کلی بسیار مؤثر است.

با تغییر فضای موجه از فضای ۱ به فضای ۲، مقدار جواب بهینه حداقل نیز تغییر نموده است.

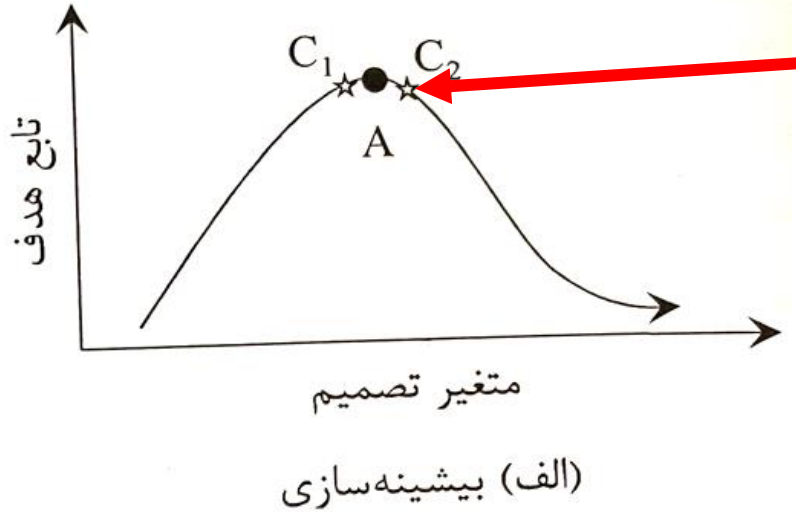


بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی

در برخی مسائل بهینه سازی مهندسی، به دلیل نوع روش بهینه سازی مورد استفاده و یا پیچیدگی ذاتی مسئله، احتمال دستیابی به جواب بهینه مطلق (کلی) بسیار کم است. در چنین شرایطی مفهوم **جواب های نزدیک بهینه** مطرح می.شود جواب های نزدیک بهینه جواب هایی هستند که از نظر مقدار تابع هدف در شرایط بسیار مطلوبی قرار داشته و فاصله اندکی با جواب بهینه مطلق دارند، ولی به طور دقیق با جواب بهینه مطلق برابر نیستند. در مسئله های مهندسی و واقعی حتی دستیابی به چنین نقطه هایی (نزدیک بهینه) از فضای تصمیم نیز می تواند خوب و مناسب باشد. بسیاری از روش های بهینه سازی مبتنی بر جستجوی تصادفی، پس از رسیدن به جواب های نزدیک بهینه متوقف می شوند.



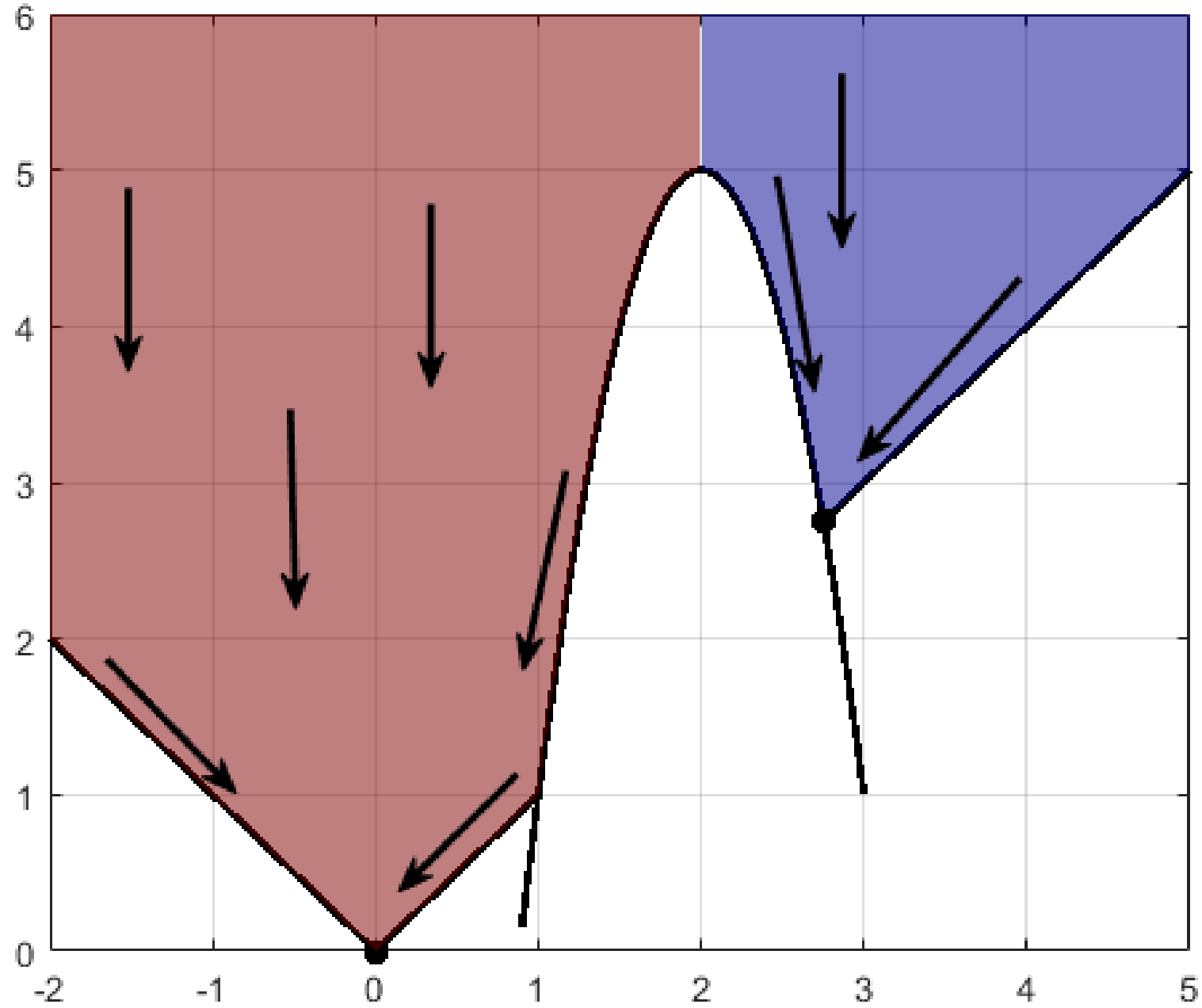
(ب) کمینه‌سازی



(الف) بیشینه‌سازی

جواب های نزدیک بهینه

بررسی وجه تمایز جواب‌های بهینه محلی و بهینه کلی



تابع هدف در این مسأله حداقل نمودن میزان y است.

$$y \geq |x|$$
$$y \geq 5 - 4(x-2)^2$$

مطابق شکل می توان دریافت در صورتی که فضای موجه $x \leq 2$ باشد، تحت این شرایط مقدار جواب بهینه نقطه $(0,0)$ است. اما در صورتی که فضای موجه $x \geq 2$ باشد، مقدار نقطه بهینه $(2.75,2.75)$ خواهد شد.

همچنین برای $-2 \leq x \leq 5$ ، دو جواب محلی وجود خواهد داشت که ممکن است رویکردهای متداول بهینه سازی نتوانند جواب بهینه کلی را ارائه دهند.